



# Vegyes térgeometria feladatok

## A GÖMB ÉS A TÖBBIEK

### 1. feladat

#### Arkhimédész élete és munkássága:

**ARKHIMÉDÉSZ** (Kr. e. 287?–212): görög matematikus, fizikus, mérnök. Az ókor legnagyobb alkotója.

A szicíliai Szirakuza városában született és élt, itt is halt meg. Apja, Pheidiasz csillagászzal foglalkozott. Arkhimédész egy ideig – pályafutásának kezdetén – a kor szellemi központjában, Alexandriában tartózkodott (talán magánál Eukleidésznél), ahol barátságot kötött Eratoszthenésszel és két másik matematikussal. Velük levelezésben maradt és felfedezéseit mindig közölte velük. Eratoszthenészhez szól ma *Módszer* címen ismert levele, amelyben az általa alkalmazott eljárásról ír. Ezek szerint a matematikai problémák megoldásakor az eredményt először „megsejtette” valamilyen mechanikai vagy gondolatkísérlet folytán, majd matematikailag bizonyította. Tételeit pedig a bizonyításuk nélkül elküldte barátainak, hogy ők is megbirkózhassanak vele.

A római történészek sok legendát őriztek meg az életéről. Az egyik szerint a hidrosztatika első törvényére a városi közfürdőben jött rá. E történet szerint Hierón király aranykoronát készíttetett, azonban felmerült benne a gyanú, hogy az ötvös elcsalt az aranyból, s egy részét ezüsttel pótolta. Arkhimédészre bízta a probléma megoldását, miszerint mutassa ki a csalást úgy, hogy a korona sértetlen maradjon. A tudós akkor is ezen töprengett, amikor a fürdőbe merülvén észrevette, hogy a kádból víz ömlik ki. Ennek annyira megörült, hogy meztelenül kiszaladt az utcára és azt kiabálta, hogy „*Heuréka, heuréka!*” (*Megtaláltam, megtaláltam!*) Megtalálta a vizsgálati módszert. Innen ered a felfedeztetéses tanítási módszer *heurisztika* neve.

Szülővárosa védelmére a II. pún háború idején hadigépeket szerkesztett, így a város két évig ellenállt a rómaiak ostromának. Végül az árulással bevett városban a homokba rajzolt ábráin töprengő tudóst egy római katona ölte meg, a tudós „*Noli turbare circulos meos!*” (*Ne zavarj a köreimet!*) felszólításán feldühödve. Arkhimédészt a támadó fél vezére, Marcellus temettette el, s a sírkövére,



kívánságának eleget téve, legkedvesebb tételének az ábráját vésette: egyenlő oldalú hengerbe írt gömb körvonalait. (A tétel szerint az egyenlő oldalú henger, a hengerbe írt gömb és a hengerbe írt kúp térfogatának aránya 3:2:1.) Sok évvel később Kr. e. 75-ben a híres római szónok, Cicero megtalálta és helyreállította a már elveszettnek hitt síremléket. Később ismét elveszett, de 1965-ben egy hotel építkezésekor ismét rábukkantak.

Matematikai művei rendkívül átgondoltak, világos érveléssel vezet el a bonyolult problémáig. Az ő érdeme volt az ún. *kimerítési elmélet* (ma: a kétoldali megközelítés módszere) is. Arkhimédész volt az integrálszámítás előfutára, kidolgozta az Arkhimédész-axiómát. Ezzel a módszerrel határozta meg a kör, az ellipszis, a különböző kúpszeletekkel és húrjaikkal határolt síkidomok területét, a gömb, a kúp, az ellipszoid és a paraboloid térfogatát, és alkalmazta súlypontszámítási feladatok megoldására is. Legbüszkébb a gömb térfogatképletének levezetésére volt. Kiszámította a görbék által (pl. az arkhimédészi spirállal) határolt területeket is, a spirális ívhosszának kiszámítását a körnégyszögesítés és a szögharmadolás megoldására is felhasználta. Szerkesztési feladatokkal is foglalkozott, felállította a szögek összeadásának és kivonásának képleteit. Megalkotta a helyiértékes jelölésrendszert (*A homokszámláló* című írásában).

Fizikai eredményei is figyelemre méltóak. A mechanikában feltalálta a végtelen csavart, a mozgó csigát, a csigasort, a fogaskereket; kidolgozta az egyszerű gépek (pl. emelők) elméletét. (Az emelőkkel kapcsolatos mondása: „*Adjatok egy szilárd pontot, és kifordítom sarkaiból a világot!*” Ezt a szilárd pontot arkhimédészi pontnak hívjuk.) A fizikában súlypontelméletével megalapozta a szilárd testek statikáját. Megteremtette a hidrosztatika alapjait.

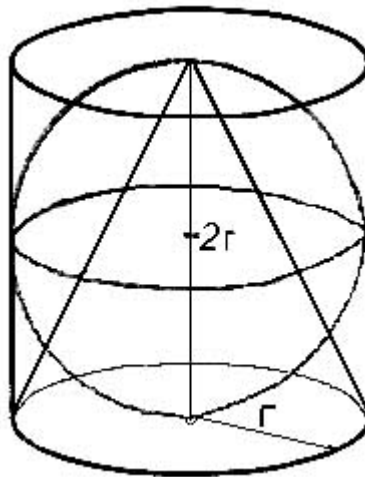
Csillagászati munkásságáról kevés emlék maradt fenn, de azt tudjuk, hogy olyan planetáriumot szerkesztett, amelyet fogaskerekekkel mozgatott; szemléltetni tudta a Nap, a Föld és a Hold egymáshoz viszonyított mozgását (*A gömbök készítéséről*).

Életéről Száva István írt regényt *A szirakuzai óriás* címmel. Plutarkhosz így írt róla: „*Becsvágyát egyedül azok a tudományok elégítették ki, amelyekben a szép és tökéletes vegyül a szükségessel.*” Voltaire pedig: „*Arkhimédész fejében több képzelőerő volt, mint Homéroszéban.*”



2. feladat

Megmutatjuk a tanult képletek segítségével, hogy az egyenlő oldalú henger, a hengerbe írt gömb és a hengerbe írt kúp térfogatának aránya 3:2:1! (Az egyenlő oldalú henger tengelymetszete négyzet.)



$$V_{\text{henger}} = r^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot r = 2 \cdot r^3 \cdot \pi = \frac{6}{3} \cdot (r^3 \cdot \pi)$$

$$V_{\text{gömb}} = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3} = \frac{4}{3} \cdot (r^3 \cdot \pi)$$

$$V_{\text{kúp}} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot r}{3} = \frac{2 \cdot r^3 \cdot \pi}{3} = \frac{2}{3} \cdot (r^3 \cdot \pi)$$

$$V_{\text{henger}} : V_{\text{gömb}} : V_{\text{kúp}} = 6 : 4 : 2 = 3 : 2 : 1$$