



Egyenes és kör közös pontja, a kör érintője

VAN-E KÖZÖS PONTJUK?

1. feladat

Megadjuk az $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 29$ egyenletű körnek azokat a pontjait, amelyeknek az első koordinátája -5 . Felírjuk a kapott két pontban a körhöz húzható két érintő egyenletét.

Megoldás:

Egy pont akkor és csak akkor van rajta a körön, ha a koordinátáit behelyettesítve igaz kijelentést kapunk. Helyettesítsük be a -5 -öt az x helyébe! Ha a kapott egyenletet megoldjuk, akkor megkaptuk a keresett pontok lehetséges második koordinátáit (3 -at, illetve -7 -et). Az érintő egyenletét a videóban is látott módon írhatjuk fel (már csak az érintő normálvektorát kell meghatározni, mert az érintő egy pontját már ismerjük).

$$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 29$$

$$(-5 + 3)^2 + (y + 2)^2 = 29$$

$$(-2)^2 + (y + 2)^2 = 29$$

$$4 + y^2 + 4y + 4 = 29$$

$$y^2 + 4y + 8 = 29$$

$$y^2 + 4y = 21$$

$$y^2 + 4y - 21 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2} = -2 \pm 5$$

$$y_1 = 3; \quad y_2 = -7$$

A keresett két pont:

$$P_1(-5; 3)$$

$$P_2(-5; -7)$$



Két érintő van:

$$2x - 5y = -25 \text{ és } 2x + 5y = -45$$



2. feladat

Igazoljuk, hogy az $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$ egyenletű görbe azonos az $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$ egyenletű körrel, és megmutatjuk, hogy ezt a kört a $3x - y = -8$ egyenletű egyenes a $P(-1; 5)$ pontban érinti.

Bizonyítás:

Az $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$ egyenletben a zárójeleket felbontva és az egyenletet rendezve láthatjuk, hogy az első egyenlet is ugyanannak a körnek az egyenlete.

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 + (y - 4)^2 &= 10 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 &= 10 \\ x^2 + y^2 - 4x - 8y + 20 &= 10 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$$

A kör középpontja: $C(2; 4)$, a $\overline{CP} = (-1; 5) - (2; 4) = (-3; 1)$ vektor pedig normálvektora az érintőnek. Ha felírjuk a P-ben érintő egyenes egyenletét, akkor az állítás igazságát már könnyen be tudjuk látni.

$$\begin{aligned} 3x - y &= -8 \\ 3 \cdot (-1) - 5 &= -8 \\ -3 - 5 &= -8 \\ -8 &= -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 &= 0 \\ (-1)^2 + 5^2 - 4 \cdot (-1) - 8 \cdot 5 + 10 &= 0 \\ 1 + 25 + 4 - 40 + 10 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

A fentebbiek alapján a $P(-1; 5)$ pont mind a körnek, mind az érintő egyenesnek pontja, tehát közös pont, vagyis érintőpont.

Más úton is bizonyíthatjuk az állítást: megoldjuk a kör egyenletéből és az egyenes egyenletéből alkotott egyenletrendszer. (Ez algebrailag nem a legegyszerűbb út, de elvileg mindent tudunk, ami szükséges a megoldáshoz.)