A koszinusztétel

1. feladat

Egy konvex négyszög alakú telek oldalainak hossza egy adott körüljárás szerint rendre 31 m, 30 m, 27 m és 25 m.

A 27 m-es és a 25 m-es oldalaknál a teleknek 97°-os szöge van.

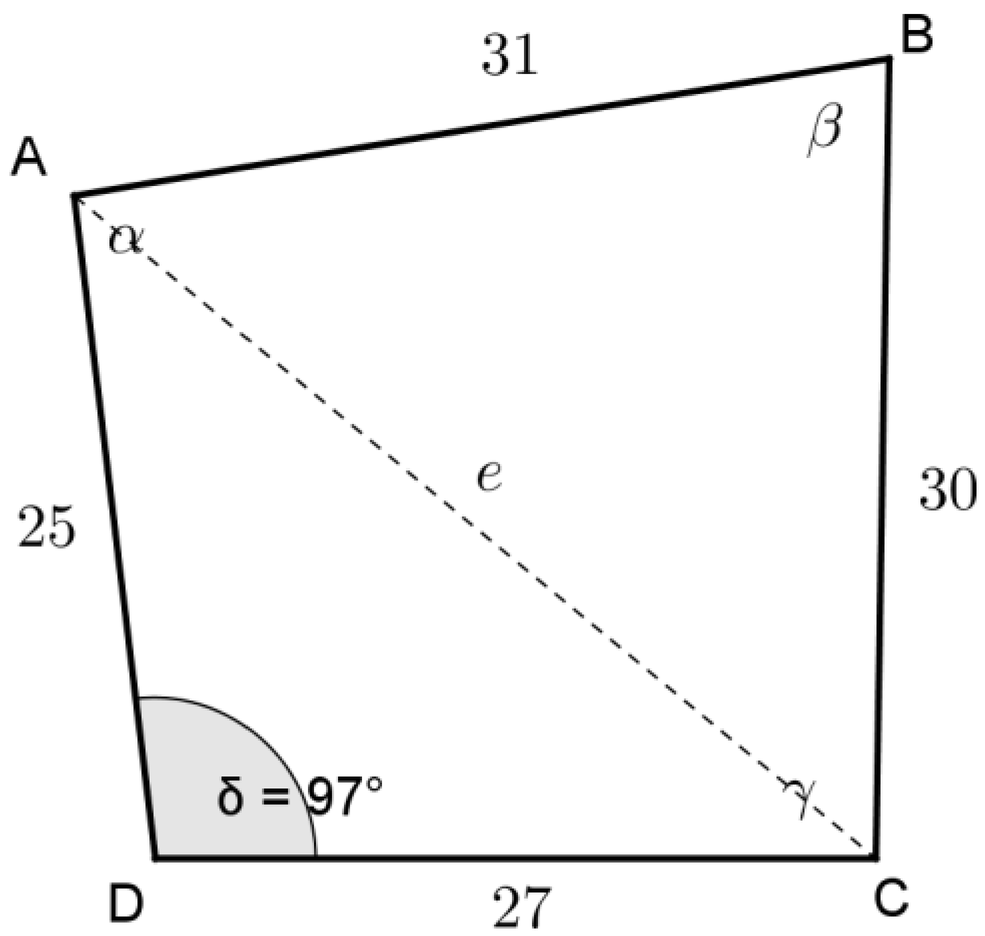
Kiszámítjuk a telek többi csúcsánál fekvő szögeket is.

Berajzoljuk a teleknek azt az átlóját, amelyik nem vágja ketté a 97°-os szöget. Ezzel két háromszögre bontottuk a négyszöget.

Először kiszámoljuk a megrajzolt átló hosszát, majd a szögeket.

A feladathoz ábrát készítünk, az ábra jelöléseit használjuk.

Ábra:



Megoldás:

Koszinusztétellel az ACD háromszögből:

$$e^2 = 25^2 + 27^2 - 2 \cdot 25 \cdot 27 \cdot \cos 97°$$

$$e^2 \approx 625 + 729 - 1350 \cdot (-0{,}12187)$$
$$e^2 \approx 625 + 729 + 164{,}5$$
$$e^2 \approx 1518{,}5$$

$$e \approx \sqrt{1518{,}5} \approx 39 \text{ m}$$

Koszinusztétellel az ABC háromszögből:

$$39^2 = 30^2 + 31^2 - 2 \cdot 30 \cdot 31 \cdot \cos \beta$$

$$1521 = 900 + 961 - 1860 \cdot \cos \beta$$
$$1521 = 1861 - 1860 \cdot \cos \beta$$
$$-340 = -1860 \cdot \cos \beta$$
$$\frac{-340}{-1860} = \cos \beta$$
$$\cos \beta = 0{,}1828$$

$$\boldsymbol{\beta \approx 79,5°}$$

A továbbiakban ugyanezt kell megismételni még kétszer.

Az ACD háromszög A csúcsánál fekvő szögre például ez jön ki: $\alpha_1 \approx 43{,}4°$, míg az ABC háromszög A csúcsánál fekvő szögre ez adódik: $\alpha_2 \approx 49{,}1°$.

A négyszög A csúcsánál tehát $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1 + \alpha_2 \approx 43{,}4° + 49{,}1° = \mathbf{92,5}°$ nagyságú szög van.

A konvex négyszög belső szögeinek összege 360°, így a négyszög C csúcsánál $\boldsymbol{\gamma} = 360° - (\alpha + \beta + \delta) \approx 360° - (92{,}5° + 79{,}5° + 97°) = 360° - 269° = \mathbf{91}°$-os szög van.

Tehát a négyszög másik három szöge rendre $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{92,5}°$, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{79,5}°$, és $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{91}°$.
(Tanulságos lehet, hogy az ábrán derékszögnek *látszó* szögek valójában *nem* azok.)

2. feladat

A csatolt GeoGebra-fájl segítségével begyakorolhatjuk a koszinusztétel használatát.

A fájl futtatásához szükséges programot letölthetjük innen: www.geogebra.org.

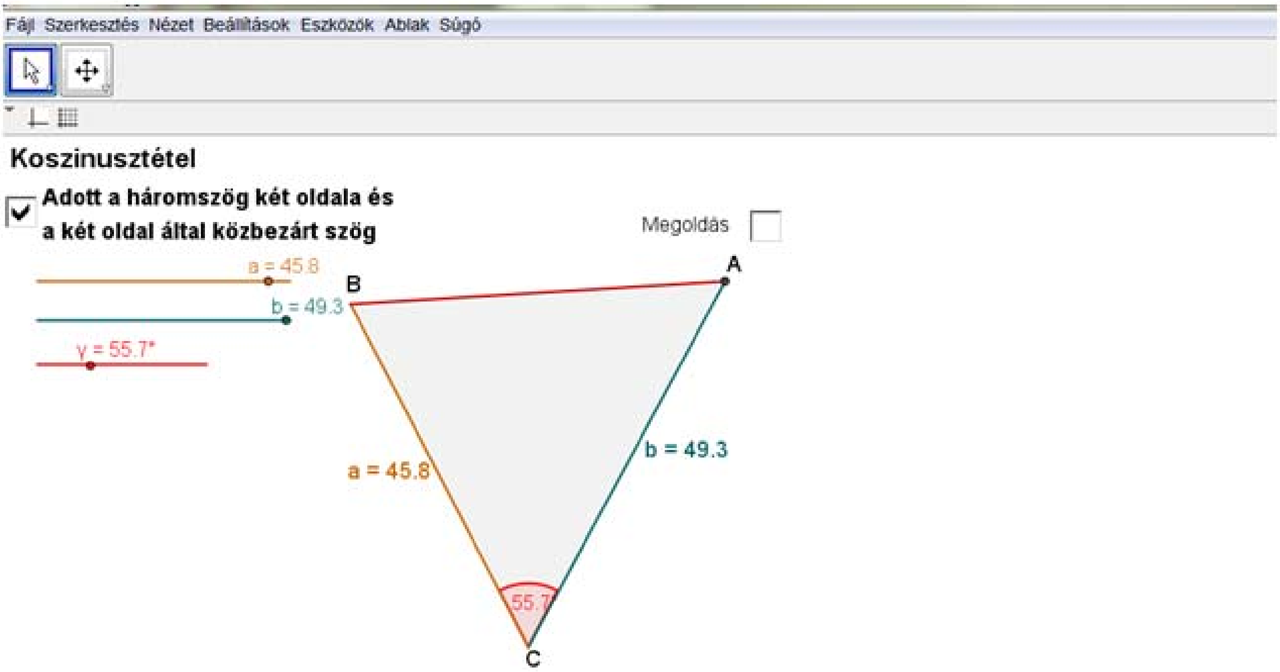
⟶ Használhatjuk az online változatot is: http://www.geogebra.org/cms/hu/download/.

A koszinusztétel akkor használható, ha a háromszög két oldala és az ezek által közbezárt szög ismert, vagy pedig ismert a háromszög mindhárom oldala.

Ezeket az eseteket gyakorolhatjuk a GeoGebra-animációkban.

A kezdő képernyőn lehet kiválasztani, hogy melyik típusfeladatot akarjuk gyakorolni.

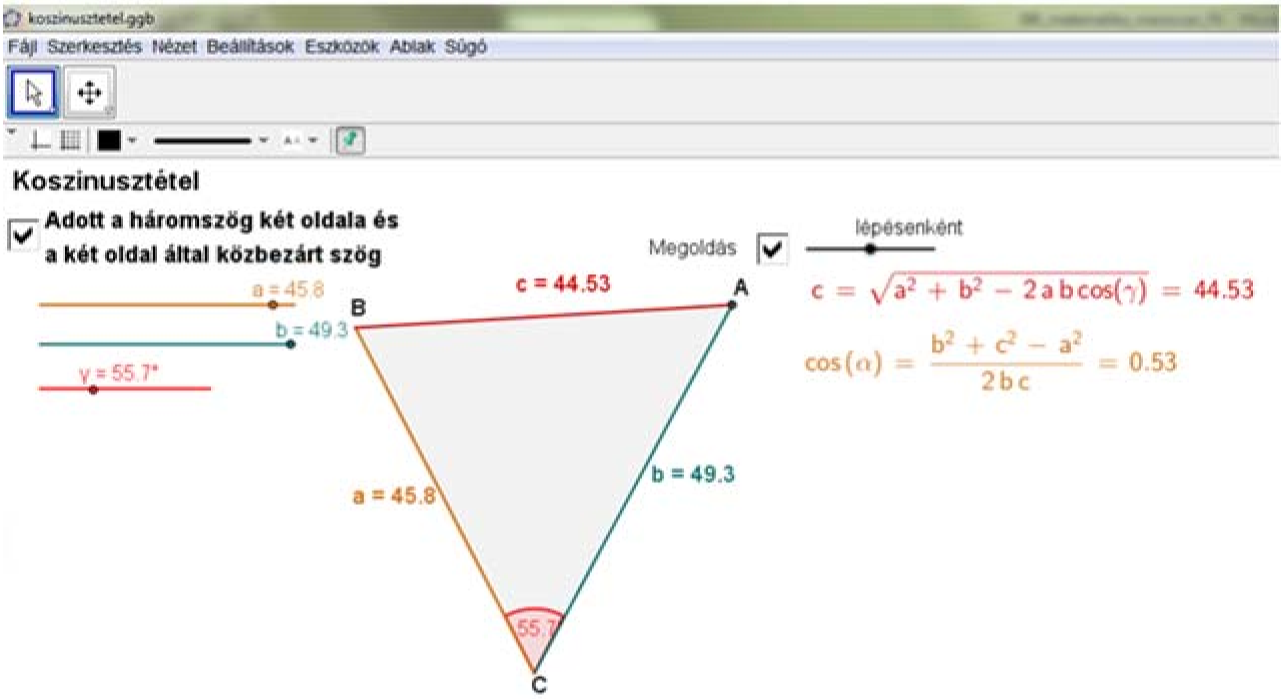
Ha az első menüpontot választjuk, akkor ez a képernyő jelenik meg:



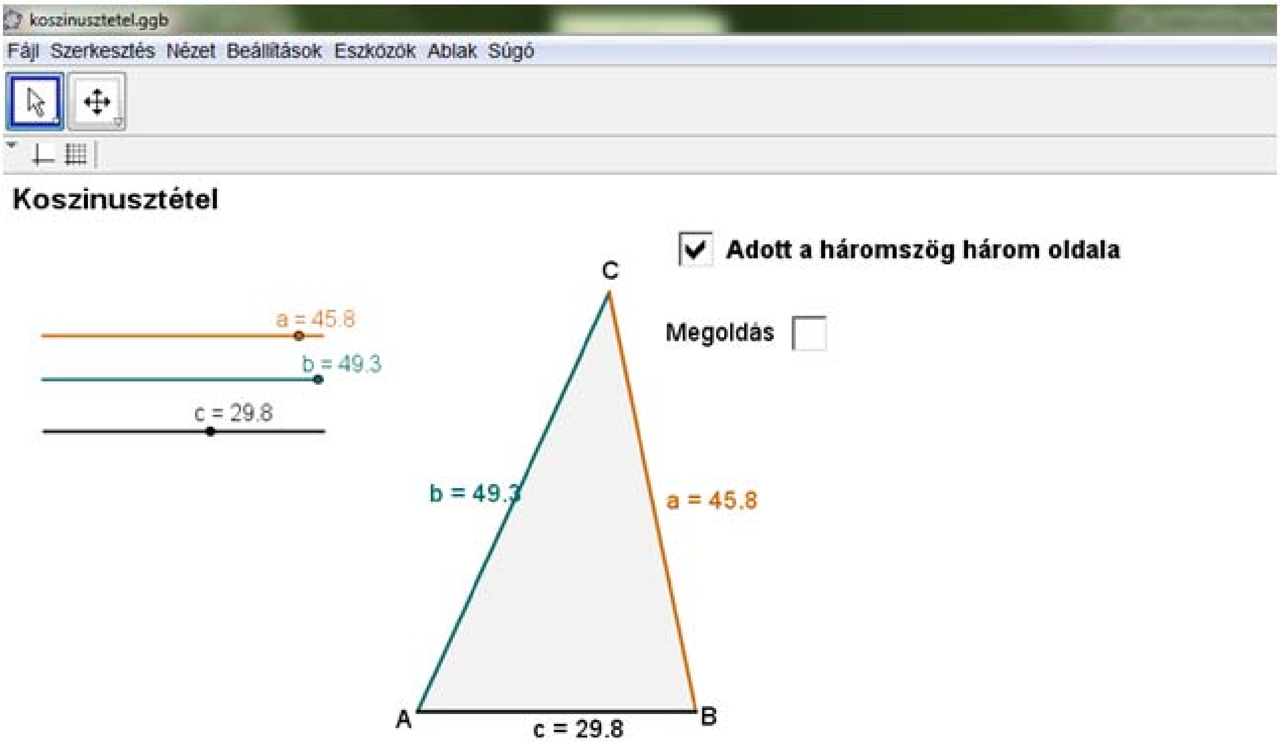
A csúszkákon beállított adatoknak megfelelő háromszög méretarányosan jelenik meg az ábrán. A csúszkákat szabadon tologathatjuk, ezzel különböző kiinduló adatokat állíthatunk be.

Amikor megállapodunk egy háromszögnél, akkor kiszámíthatjuk a háromszög harmadik oldalát és a másik két szögét.

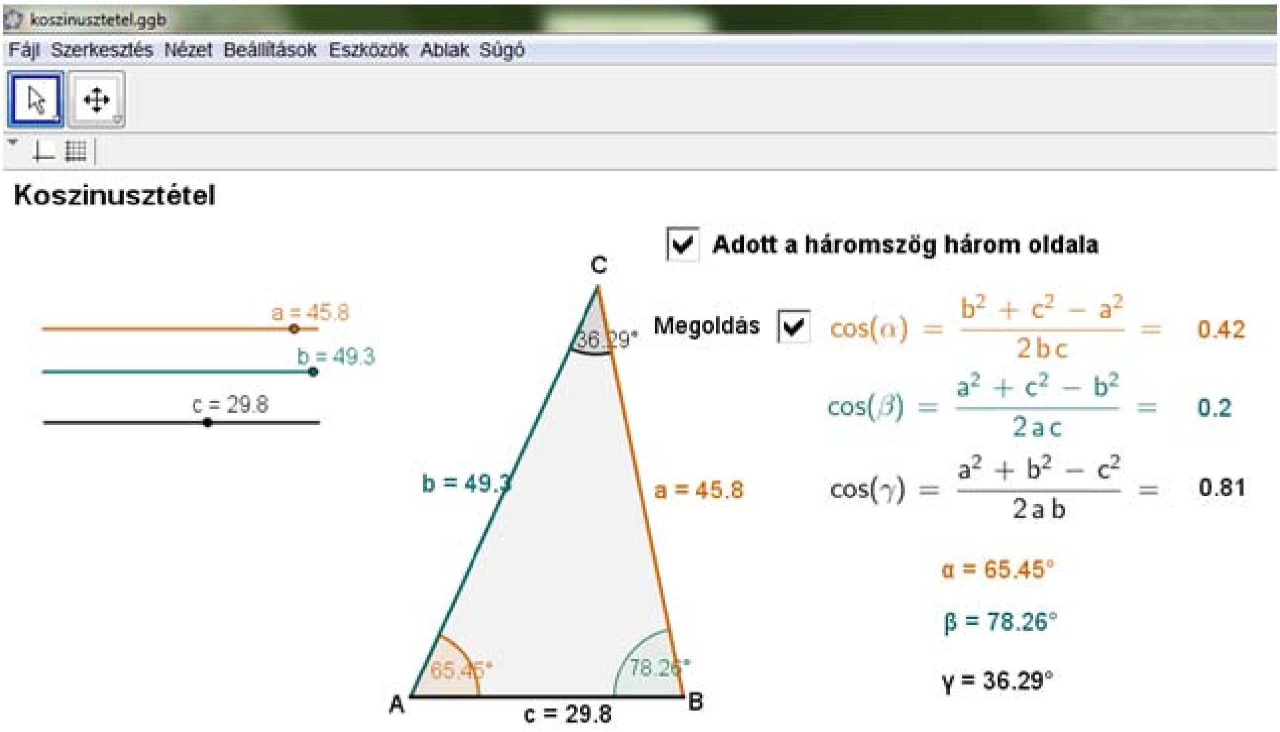
A Megoldás jelölőnégyzettel előhívhatjuk a gép megoldását, sőt lépésenként is ellenőrizhetjük a saját megoldásunkat, ha a csúszka gombját jobbra eltoljuk.



Ha kezdéskor a másik menüpontot választjuk, akkor persze kétszer ugyanazt a feladatot kell megoldanunk, emiatt aztán a gépi megoldás sem áll sok lépésből.



A Megoldás jelölőnégyzetre kattintva minden láthatóvá válik, ezért ezt csak a saját megoldásunk ellenőrzésére jelöljük be.



A gép pontosan számol, de a szögfüggvényeket és a szögeket mindenütt két tizedesjegyre kerekítve adja meg. (Ez zavaró lehet; ezért számoljunk legalább négy tizedesjeggyel a szögfüggvényeknél!)