# Egyenletek megoldása logaritmussal

## SEGÍT A LOGARITMUS

*1. feladat*

a)

$$1500 \cdot 0{,}87^{\frac{x}{200}} = 750$$

Megoldás:

$$1500 \cdot 0{,}87^{\frac{x}{200}} = 750$$
$$0{,}87^{\frac{x}{200}} = 0{,}5$$

A logaritmus definíciója szerint:

$$\frac{x}{200} = \log_{0{,}87} 0{,}5 = \frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}87}$$

Számológéppel kiszámolva:

$$\frac{x}{200} \approx 4{,}977$$

$$x \approx 200 \cdot 4{,}977$$

$$\boldsymbol{x \approx 995,457}$$

Ellenőrzés behelyettesítéssel:

$$1500 \cdot 0{,}87^{\frac{995{,}457}{200}} = 1500 \cdot 0{,}87^{4{,}977285} \approx 1500 \cdot 0{,}5 = 750$$

Tehát valóban $\boldsymbol{x = 995,457}$ az egyenlet egyetlen megoldása.

b)

$$\log_2(x-8)+\log_2 x = 7$$

Megoldás:

A baloldalon a szorzat logaritmusára vonatkozó azonosság szerint:

$$\log_2 x\cdot(x-8) = 7$$

A 2-es alapú logaritmus definíciója miatt:

$$x\cdot(x-8) = 2^7$$

Rendezzük az egyenletet!

$$x^2-8x = 128$$
$$x^2-8x-128 = 0$$

Egy másodfokú egyenletet kapunk. Oldjuk meg!

$$x_{1,2} = \frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 1\cdot(-128)}}{2\cdot 1} =$$
$$= \frac{8\pm\sqrt{64+512}}{2} = \frac{8\pm\sqrt{576}}{2} =$$
$$= \frac{8\pm 24}{2} = 4\pm 12$$

$$\boldsymbol{x_1 = 16}; \qquad x_2 = -8$$

Ellenőrzés behelyettesítéssel:

Ha $x_1 = 16$-ot helyettesítünk az eredeti egyenletbe:

$$\log_2(16-8)+\log_2 16 = \log_2 8 + \log_2 16 = 3+4 = 7$$

Tehát az $\boldsymbol{x} = \mathbf{16}$ valóban megoldása az egyenletnek.

Ha $x_2 = -8$-at helyettesítünk az eredeti egyenletbe:

$$\log_2(-8-8)+\log_2(-8) = \log_2(-16)+\log_2(-8)$$

Ez nincs értelmezve.

Tehát az $\boldsymbol{x} = -\mathbf{8}$ nem megoldása az egyenletnek.

c)

$$\log_3 x^5 = \log_3 x^3 - 2$$

Megoldás:

A hatvány logaritmusára vonatkozó azonosságot alkalmazzuk:

$$5 \cdot \log_3 x = 3 \cdot \log_3 x - 2$$

$$2 \cdot \log_3 x = -2$$

$$\log_3 x = -1$$

A 3-as alapú logaritmus definíciója szerint:

$$x = 3^{-1}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{3}}$$

Ellenőrzés behelyettesítéssel:

$$\log_3 \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \log_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2$$

$$\log_3 (3^{-1})^5 = \log_3 (3^{-1})^3 - 2$$

$$\log_3 3^{-5} = \log_3 3^{-3} - 2$$

$$-5 = -3 - 2$$

$$-5 = -5$$

Igaz kijelentéshez jutottunk, tehát az $\boldsymbol{x = \frac{1}{3}}$ valóban megoldása az eredeti egyenletnek.

d)

$$\lg(x+8)-\lg x=\lg 5$$

Megoldás:

A hányados logaritmusára vonatkozó azonosság szerint:

$$\lg\frac{x+8}{x}=\lg 5$$

A 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton, ezért

$$\frac{x+8}{x}=5$$

Rendezve az egyenletet:

$$x+8=5x$$
$$8=4x$$

$$\boldsymbol{x=2}$$

Ellenőrzés behelyettesítéssel:

$$\lg(2+8)-\lg 2=\lg 5$$

$$\lg 10-\lg 2=\lg 5$$

$$\lg\frac{10}{2}=\lg 5$$

$$\lg 5=\lg 5$$

Tehát az $\boldsymbol{x=2}$ valóban megoldása az eredeti egyenletnek.