A gyöktényezős alak és a Viéte-formulák

1. feladat

a) A diszkrimináns mindkét esetben nagyobb, mint 0, ezért a polinomok szorzattá alakíthatók.

I.

$\mathbf{3x^2 - 17x - 6 = 0}$ megoldásai:

$$x_1 = \frac{-(-17) + \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3} = \frac{17 + \sqrt{361}}{6} = 6$$

$$x_2 = \frac{-(-17) - \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3} = \frac{17 - \sqrt{361}}{6} = -\frac{1}{3}$$

Így a polinom szorzat alakja:

$$3x^2 - 17x - 6 = 3 \cdot (x - 6) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)$$

II.

$\mathbf{x^2 - 4x - 12 = 0}$ megoldásai:

$$x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + \sqrt{64}}{2} = 6$$

$$x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - \sqrt{64}}{2} = -2$$

Így a polinom szorzat alakja:

$$x^2 - 4x - 12 = (x - 6) \cdot (x + 2)$$

b) Az előző feladatban felírt szorzat alakokat behelyettesítve látszik, hogy $(x-6)$-tal lehet egyszerűsíteni.

$$\frac{3x^2-17x-6}{x^2-4x-12}=\frac{3\cdot(x-6)\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right)}{(x-6)\cdot(x+2)}=\frac{3\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right)}{(x+2)}$$

2. feladat

Az egyenlet diszkriminánsa pozitív, tehát két különböző valós gyöke van.

A Viéte-formulák alkalmazásával a $2x^2 - 3x - 10 = 0$ egyenlet

a) valós gyökeinek összege:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$$

b) valós gyökeinek szorzata:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-10}{2} = -5$$

c) valós gyökeinek négyzetösszege:

Az $(x_1 + x_2)^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + 2 \cdot (x_1 \cdot x_2)$ nevezetes szorzatot felhasználva a négyzetösszeg az alábbiak szerint fejezhető ki, melybe
a Viéte-formulákat helyettesítve megkapjuk az eredményt.

$${x_1}^2 + {x_2}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot (x_1 \cdot x_2) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot (-5) = \frac{9}{4} + 10 = \frac{9 + 40}{4} = \frac{49}{4}$$

d) valós gyökei reciprokainak összege:

A törteket közös nevezőre hozzuk, aminek eredményeképpen a két Viéte-formulát kapjuk a nevezőben, illetve a számlálóban. A korábbi eredményeket behelyettesítve megkapjuk a végeredményt.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{\frac{3}{2}}{-5} = -\frac{3}{10}$$

3. feladat

a) A megoldóképletet felhasználva az $\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} - 18 = 0$ egyenlet gyökei:

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 + \sqrt{9 + 72}}{2} = \frac{3 + \sqrt{81}}{2} = \frac{3 + 9}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 - \sqrt{9 + 72}}{2} = \frac{3 - \sqrt{81}}{2} = \frac{3 - 9}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

b)

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$6 + (-3) = -\frac{-3}{1}; \qquad 6 \cdot (-3) = \frac{-18}{1}$$

$$3 = 3 \qquad -18 = -18$$

A Viéte-formulákba a gyököket, illetve az együtthatókat behelyettesítve azonosságokat kapunk. Ez ekvivalens azzal, mintha az egyenlet mindkét gyökével a szokásos módon ellenőrzést végeztünk volna, így a megoldásunk helyes.

4. feladat

a) A megadott gyököket a másodfokú egyenlet gyöktényezős alakjába behelyettesítve kapjuk az alábbi egyenletet:

$$(x-3)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$$

A műveleteket elvégezve kapjuk az általános alakot:

$$(x-3)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)=x^2-3x+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}$$

Tehát az $x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=0$ egy jó megoldása a feladatnak.

(A tanultak alapján ennek bármely – nem nulla – konstansszorosa is jó megoldás.)

b) Előző feladatmegoldásaink során is említettük, hogy a tanultak alapján egy másodfokú egyenlet minden tagját egy nem nulla konstans taggal megszorozva az egyenlet megoldásai nem változnak. Ezért az egész együtthatók elérése érdekében az $x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=0$ egyenletet 2-vel vagy a 2 többszöröseivel szükséges beszorozni.

Így a keresett egyenlet lehet a $2x^2-5x-3=0$.